СИГНАЛЛАРНИ ХААРА ВА ВЕЙВЛЕТ-ХААРА СПЕКТРАЛ КОЭФИЦИЕНТЛАРИ ОРҚАЛИ ДАРАЖАЛИ КЎПҲАДЛАР КЎРИНИШИДА ИФОДАЛАШ

ВЫРАЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В ВИДЕ ПОЛИНОМОВ СТЕПЕНЕЙ С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХААРА И ВЕЙВЛЕТ-ХААРА

EXPRESSING SIGNALS AS POWER POLYNOMIALS USING SPECTRAL COEFFICIENTS XAARA AND WAVELET-XAARA

Умаров Ш.А., Тожибоев И.Т.
Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети Фарғона филиали

Мақолада сигналларни қайта ишлашда уларни кўпҳад кўринишида тасвирлаб, Хаара алмаштириши билан Вейвлет-Хаара алмаштиришларини қўллаш орқали янги ифодаларни яратиш, уларнинг бир-биридан фарқи ва ҳисоблаш жараёнидаги афзалликлари кўрсатиб берилган. Бир қатор эламентар функцияларнинг қаторга ёйиш жадвал кўринишида ифодаланган.

Таянч сўзлар: *аппроксимация, Уолш-Адамар, Вейвлет-Хаара базис матрицаси, ортогонал функция, алгебраик полином, спектрал коэффициент.*

В статье описывается обработка сигналов в полиномиальной форме, создание новых выражений с использованием преобразование Вейвлета-Хаара с преобразование Хаара, их отличия друг от друга и их преимущества в вычислительном процессе. Распределение ряда элементарных функций представлено в табличной форме.

Ключевые слова: *аппроксимация, Уолша-Адамара, базовая матрица Вейвлета-Хаара, ортогональная функция, алгебраический полином, спектральный коэффициент.*

The article describes signal processing in polynomial form, the creation of new expressions using the Wavelet-Haar transform with the Haar transform, their differences from each other and their advantages in the computational process. The distribution of a number of elementary functions is presented in tabular form.

Keywords: *approximation, Walsh-Hadamard, basic Wavelet-Haar matrix, orthogonal function, algebraic polynomial, spectral coefficient.*

Ахборот-коммуникацияларини жадал суръатлар билан ривожланиши сигнал ва тасвирларга рақамли ишлов беришнинг, уларнинг математик ва дастурий таъминотини яратиш бўйича бир қатор илмий тадқиқот ишлари олиб бориш зарурийлиги замон талаби бўлиб қолди. Бу ишларда сигналлар ва тасвирларни фильтрлаш, интерполяциялаш ва децимациялаш ҳамда уларни тармоқ орқали узатишда вақтдан ютиш, хотирада сақлаганда кам жой эгаллаши каби масалалар учун унумли математик метод ва алгоритмлар яратиш соҳаси муҳим роль тутмоқда [1], [2], [4].

Бундай масалаларни ечишда бир қатор олимлар илмий изланишлар олиб борган, жумладан, хорижда J.Walsh, W.Prett, Dr. Pawel, Dobeshi, Ўзбекистонда М.Мусаев, Х.Зайниддинов, Р.Алоев, М.Арипов, А.Қобуловлар [2], [3], [4], [5], [6].

Юқоридаги масалаларни ечишда одатда базавий алмаштиришларнинг энг самарали танлаб олинади. Сигналларни қайта ишлашда Фурье алмаштиришлари муҳим бўлсада, уларни рақамли кўринишга ўтказишда Уолш-Адамар алмаштиришлари самаралироқдир. Бундан ташқари, Уолш-Адамар алмаштиришининг базис функциялари матрицалари -1 ва 1 сонларидан иборатлиги ҳисоблаш воситаларининг тезлиги, аниқлилиги ва соддалилигини таъминлайди. Шунингдек, матрицаларнинг ўлчовлари 2 нинг даражаларида ифодаланиши ҳам ҳисоблашнинг соддалаштиради. Хаара алмаштиришида базис функциялари матрицалари $-\sqrt{2}$,-1, 1, $\sqrt{2}$ сонларидан иборат. Булар ҳам ўз навбатида 2 нинг даражаларига мос келади.

Сигналларни синтезлаш, ишлов бериш ва катта ҳажмдаги маълумотларни зичлаш ҳамда табиатнинг турли тасвирлари таҳлилида қўлланилувчи функциялар оиласи вейвлет деб аталади. Вейвлет функциялари амалиётда чекли вақт интервалида аниқланган, аналитик бўлмаган, яъни дискрет берилган сигналлар билан ишланади. Амалиётда кўп фойдаланиладиган вейвлет функциялари: ***HAAR*** – вейвлет, ***FHAT*** - вейвлет ("Француз шляпаси" - French hat), ***Wave*** – вейвлет, ***MHAT*** - вейвлет ("Мексика шляпаси" - Mexican hat), ***Морле*** в***ейвлети*** (комплекс базис кўринишида).

Вейвлет ўзгартириши сонлар ўқида, $L^2(R)$ фазога тегишли ва локал $\psi(x)$ базис функция асосига қурилган бўлиб, бир ўлчамли ва икки ўлчамли (тасвирлар) сигналларни фильтрлаш ва сиқиш масалаларини ечишда яхши натижалар беради. Бу масалаларни унумли ечишда кирувчи сигналлар дискрет ўзгартириш ёрдамида полином кўринишига келтирилади, чунки алгебраик полином кўриниш унверсал аппроксимация усул ҳисобланади.

Ушбу мақолада сигналларни қайта ишлашда уларни кўпҳад кўринишида тасвирлаб, Хаара алмаштириши билан Вейвлет-Хаара алмаштиришларини қўллаш, бунда сигнални функция кўринишида ифодалаш орқали бошқа характерстикаларини очиш масаласи кўрилади. Бунда асосий мақсад номаълум $f(x)$ кирувчи сигнални функция кўринишида ифодалаб, уни

$$F(x)=\sum_{j=0}^{k} A_j \cdot x^j$$

кўринишга олиб келиш ва ушбу ўзгартиришларни таққослаш орқали аппроксимация жараёнидаги афзалликларни очиб беришдан иборат бўлади.

Маълумки, Уолш-Адамар алмаштиришлари каби Хаара алмаштириши ҳам Хаара функцияси матрицаси асосига қурилган.

Тўғри ва тескари Хаара алмаштиришлари қуйидагича бўлади:

$$h_s=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\varphi(x)H_l^{(s)}(x) \text{ ва } \varphi(x)=\sum_{s=0}^{N-1}h_sH_l^s(x),$$

бу ерда $H_l^{(s)}(t)=\begin{cases}2^{l/2}, \frac{s-1}{2^l}\le t<\frac{s-1/2}{2^l}\\ -2^{l/2}, \frac{s-1/2}{2^l}\le t<\frac{s}{2^l}\\ 0, \ t\notin[0,1)\end{cases}$ - Хаара функцияси, $0\le l<\log_2 N$ ва $0\le s\le 2^l-1$.

Вейвлет-Хаара функциясининг тўғри ва тескари алмаштиришлари қуйидагича бўлади:

$$v_s=2^{-m+l}\sum_{x=0}^{2^m-1}\varphi(x)V_l^{(s)}(x) \text{ ва } \varphi(x)=v_0^{(0)}V_0^{(0)}+\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{s=1}^{2^l}v_l^{(s)}V_l^{(s)}(x),$$

бу ерда $V_l(t)=\begin{cases}1, \quad 0\le t<\frac{1}{2},\\ -1, \quad \frac{1}{2}\le t<1,\\ 0, \quad t<0, \quad t\ge 1.\end{cases}$ - Хаар функциясининг вейвлет ифодаси.

Айтайлик, $\varphi(x)=Ax^2+Bx+C$ полином кўринишда берилган бўлсин.

N=8 бўлганда Хаара ва Вейвлет-Хаара функциясининг тўғри алмаштиришлари ёрдамида чизиқли алгебралар системаси тузиб олинади. Уни бир қатор алмаштиришлар ёрдамида ечиб, Хаара ва Вейвлет-Хаара спектрал коэффициентлари қуйидагилар орқали топилади:

Группалар	Хаара спектрал коэффициенти	Вейвлет-Хаара спектрал коэффициенти
0-группа	$h_0=\frac{1}{3}A+\frac{1}{2}B+C$	$wh_0=\frac{1}{3}A+\frac{1}{2}B+C$
1-группа	$h_1=-\frac{A+B}{4}$	$wh_1=-\frac{A+B}{4}$
2-группа	$h_2=-\frac{\sqrt{2}}{2^4}(A+2B)$ $h_3=-\frac{\sqrt{2}}{2^4}(3A+2B)$	$wh_2=-\frac{1}{2^4}(A+2B)$ $wh_3=-\frac{1}{2^4}(3A+2B)$
3-группа	$h_4=-\frac{1}{2^5}(A+4B)$ $h_5=-\frac{1}{2^5}(3A+4B)$ $h_6=-\frac{1}{2^5}(5A+4B)$ $h_7=-\frac{1}{2^5}(7A+4B)$	$wh_4=-\frac{1}{2^6}(A+4B)$ $wh_5=-\frac{1}{2^6}(3A+4B)$ $wh_6=-\frac{1}{2^6}(5A+4B)$ $wh_7=-\frac{1}{2^6}(7A+4B)$

Бу ифодаларда группалаш ва тизимлаштиришлар амалга оширилгандан сўнг қуйидагича умумий формула келиб чиқади.

Группалар	Хаара спектрал коэффициенти	Вейвлет-Хаара спектрал коэффициенти
m-группа m=1,2,… j- m-группадаги коэффициентлар тартиби (j=0,1,2,...)	$h_{mj}=2^{\frac{l}{2}}\left(-2^{-(m+1)}B-\left(j-2^{-1}\right)2^{(1-2m)}A\right)$, бу ерда $2^{l/2}$ - оғирлик коэффициенти	$wh_{mj}=-2^{-(m+1)}B-2^{(1-2m)}\left(j-2^{-1}\right)A$

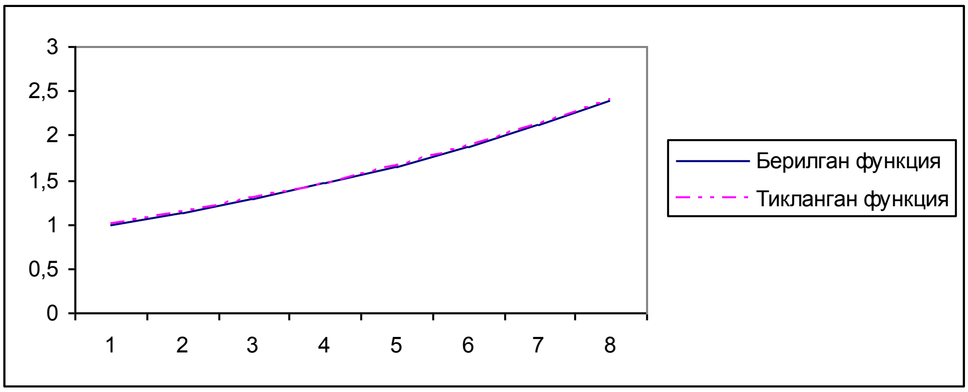
Тескари алмаштиришлар ёрдамида спектрал коэффициент мавжуд бўлган ҳолда функцияни тиклаш эса қуйидаги формулалар орқали бажарилади:

Хаара спектрал коэффициенти орқали	Вейвлет-Хаара спектрал коэффициенти орқали
$A=2^{l/2}\cdot 2^{2m-1}\left(h_{m0}-h_{m1}\right)$ $B=2^{l/2}\cdot 2^{2m-2}\left(h_{m1}-(2m-1)h_{m0}\right)$ $C=h_0+2^{l/2}\cdot\frac{2^{2m-3}}{3}\left(h_{m1}+(6m-7)h_{m0}\right)$	$A=2^{2m-1}\left(wh_{m0}-h_{m1}\right)$ $B=2^{2m-2}\left(wh_{m1}-(2m-1)wh_{m0}\right)$ $C=wh_0+\frac{2^{2m-3}}{3}\left(wh_{m1}+(6m-7)wh_{m0}\right)$

Юқоридагилардан кўринадики, Хаара функцияси Вейвлет-Хаара функциясининг хусусий холи, лекин қийматлар соҳаси Вейвлет-Хаара функциясининг қийматлар соҳасидан кенгроқ. Лекин Вейвлет-Хаара функциясидан фойдаланилганда кўпайтириш амалини сонларни қўшни ячейкага суриш амалига (2^k) алмаштириш имконияти мавжуд. Шунга кўра, элементар функцияларни спектрал коэффициентлар орқали ифодалашда Хаара функциясидан кўра Вейвлет Хаара функциясидан фойдаланиш вақтдан ютиш, амаллар сонини камлиги билан афзалликка эга.

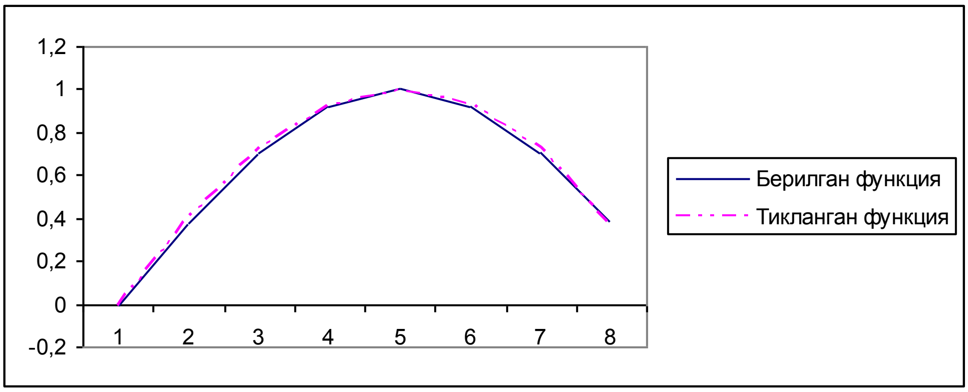
Мисол: $\varphi(x)=e^x$

№	x	$\varphi(x)$	v_k	A_k	$\overline{\varphi}(x)$	max δ (%)	σ (%)
0	0	1	1,6131	0,99969	0,99969	0,011	0,014
1	0,125	1,13315	-0,395	1,0106	1,13346		
2	0,25	1,28403	-0,151	0,44395	1,28417		
3	0,375	1,45499	-0,25	0,26067	1,45485		
4	0,5	1,64872	-0,067		1,64858		
5	0,625	1,86825	-0,085		1,86839		
6	0,75	2,117	-0,11		2,11736		
7	0,875	2,39888	-0,141		2,39852		



Мисол: $\varphi(x)=\sin\pi x$

№	x	$\varphi(x)$	v_k	A_k	$\overline{\varphi}(x)$	max δ (%)	σ (%)
0	0	0	0,6284	-0,0177	-0,0177	1,9	1,4
1	0,125	0,3827	-0,125	3,7296	0,40039		
2	0,25	0,7071	-0,3121	-2,96377	0,71515		
3	0,375	0,9239	0,2085	-0,9151	0,91584		
4	0,5	1	-0,1913		0,99174		
5	0,625	0,9239	-0,1084		0,93214		
6	0,75	0,7071	0,0381		0,72629		
7	0,875	0,3827	0,1622		0,3635		



Фойдаланилган адабиётлар.

1. И.М.Соболь. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: «Наука», 1969.
2. Н.Ахмед, К.Р.Рао. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: «Связь», 1980.
3. Мусаев М.М., Ходжаев Л.К. Получение полиномиальных аппроксимирующих структур с помощью разложений Фурье-Уолша. Вопросы вычислительных и прикладных математики. – 1985. Вып. 77, – с. 132-136.
4. Aloev.R.D, Dadabayev S.U. Checking the stability of the finite difference schemes for symmetric hyperbolic systems using Fourier transitions. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. Vol. 5, Issue 11, November 2018. p.7373-7376

5. Kellya J. S., Liaw C., Osbornc J. Moment representations of exceptional X_1 orthogonal polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Volume 455, Issue 2, 15 November 2017, Pages 1848-1869
6. Štikonas A. The root condition for polynomial of the second order and a spectral stability of finite-difference schemes for Kuramoto-Tsuzuki quation, Mathematical Modelling and Analysis, 3:1, 214-226
7. Umarov Sh. Use of Chebyshev polynomials in digital processing of signals. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. Vol. 6, Issue 2, February 2019