DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALARNING BA'ZI TADBIQLARI

Ismatov N.A., Fayzullayev Sh.U. JDPI

Annotatsiya. Matematik analiz kursini o'rganish jarayonida funksiyalarning eng muhim sinflaridan biri sifatida differensiallanuvchi funksiyalar sinfi qaraladi. Ushbu maqolada differensiallanuvchi funksiyalarning ba'zi tadbiqlari hamda undan kelib chiqadigan natijalar keltirilgan.

Kalit so'zlar. Funksiya, differensial, uzluksizlik, differensiallanuvchi funksiya.

Faraz qilaylik, $f(x)$ haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. Bunda dastlab quyidagi savollarga javob izlaymiz:

1. Segmentda differensiallanuvchi bo'lgan funksiyaning shu segmentda chegaralangan bo'lishi ma'lum, Uning hosilasi ham har doim chegaralangan bo'ladimi?
2. Differensiallanuvchi funksiya, avvalambor o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi, shu xossa uning hosilasi uchun ham bajariladimi?

Uzluksiz funksiyalarning global xossalaridan ma'lumki, agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $f(a) = A$; $f(b) = B$ bo'lsa, u holda istalgan $C \in [A;B]$ uchun shunday $c \in [a;b]$ mavjudki

$$f(c) = C$$

tenglik bajariladi.

Quyida xuddi shu xossa haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va differensiallanuvchi funksiyaning hosilasi uchun ham o'rinli bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Teorema: *Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya I intervalda aniqlangan bo'lib, shu intervalda differensiallanuvchi bo'lsin.* $[a;b] \in I$

U holda $f'(x)$ funksiya (uzluksiz bo'lmasa ham) $[a;b]$ segmentda $f'(a)$ va $f'(b)$ sonlari orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Dastlab teorema isboti uchun zarur bo`lgan quyidagi lemmalarni isbotlaymiz:

1-Lemma. *Faraz qilaylik $g(x)$ funksiya I intervalda aniqlangan bo'lib, shu intervalda differensiallanuvchi bo'lsin.* $[a;b] \in I$

Agar $g'(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda shunday $c \in (a;b)$ mavjudki, $g'(c) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Tasdiqni isbotlashda quyidagi lemmadan foydalanamiz.

2-Lemma. *Agar funksiya biror nuqtada musbat (manfiy) hosilaga ega bo'lsa u holda funksiya shu nuqtada qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.*

2-lemmaning isboti:

Umumiylikka zarar yetkazmagan holda $f'(a) > 0$ bo'lsin deb olaylik. Ma'lumki, $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$. U holda $\mu(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ funksiya nolning biror $U_\delta(0)$ atrofida ham faqat musbat qiymatlarni qabul qiladi. Demak, shu atrofda $h > 0$ bo'lganda $f(a+h) > f(a)$ bo'lib, $h < 0$ bo'lganda $f(a+h) < f(a)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu funksiyaning a nuqtada qat'iy o'suvchi ekanligini bildiradi.

Endi 1-lemmaning isbotiga qaytamiz. Faraz qilaylik $g'(a) > 0$ va $g'(b) < 0$ bo'lsin. 2-lemmadan ma'lumki shunday δ_1 mavjudki $[a; a+\delta_1)$ da funksiya qat'iy o'suvchi bo'ladi.

Agar $g'(a+\delta_1) = 0$ bo'lsa u holda maqsadga erishgan bo'lamiz, agarda $g'(a+\delta_1) < 0$ bo'lsa u holda funksiya $(a+\delta_1)$ nuqtaning biror atrofida qat'iy kamayuvchi bo'ladi, lekin bu atroflarning har biri $[a; a+\delta_1)$ bilan umumiy nuqtaga ega bo'lganligi, $[a; a+\delta_1)$ da funksiya qat'iy o'suvchi bo'lganligi uchun ziddiyatga kelamiz. Tasdiqning $g'(a+\delta_1) > 0$ holda o`rinli ekanligini isbotlash yetarli. Bu holda shunday δ_2 mavjudki, $[a; a+\delta_1+\delta_2)$ oraliqda funksiya qat'iy o'suvchi bo'ladi. Jarayonni shunday davom ettiraversak berilgan funksiya b nuqtaning istalgan atrofida qat'iy o'suvchi ekanligini aniqlaymiz. Lekin $g'(b) < 0$ bo'lganligi uchun funksiya bu nuqtaning qandaydir atrofida qat'iy kamayuvchi bo'lishi kerak edi. Bu ziddiyat farazimiz noto'gri va lemma tasdig`i o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Teoremaning isboti: Umumiylikka zarar yetkazmagan holda $f'(a) < f'(b)$ deb olaylik.

$$g(x) = f(x) - xC$$

funksiyani qaraymiz. U holda

$$g'(x) = f'(x) - C \quad \text{bo'lib,}$$

$g'(a) = f'(a) - C = A - C < 0$ va $g'(b) = f'(b) - C = B - C > 0$ tengliklar o`rinli bo'ladi.

Yuqorida isbotlangan 1-lemmadan foydalanib shunday $c \in (a; b)$ mavjudligini aniqlaymizki, bunda $g'(c) = 0$ ya'ni $f'(c) = C$ tenglik o'rinli bo'ladi.Teorema isbotlandi.

Yuqorida isbotlangan teoremaning geometrik ma'nosini quyidagicha talqin qilish mumkin.

Segmentda differensiallanuvchi bo'lgan funksiya grafigiga segmentning chetki nuqtalarida o'tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsiyentlari mos ravishda k_1 va k_2 larga teng bo'lsa, u holda $\forall k \in [k_1; k_2]$ uchun segmentning shunday nuqtasi mavjudki bu nuqtadan funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti k ga teng bo'ladi.

Bundan tashqari quyidagi tasdiq ham o'rinlidir.

Tasdiq: Agar $(a; b)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lsa, u holda shunday $c_1, c_2 \in (a; b)$ sonlar mavjudki

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{f''(c_2)}{f'(c_1)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bunda $f'(b) \neq f'(a), f(b) \neq f(a)$.

Tasdiqning isboti oson bo'lganligi uchun uni isbot etishni o'quvchining o'ziga havola etamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar:

1. O'zi chegaralangan, ammo hosilasi chegaralanmagan differensiallanuvchi funksiya mavjudmi?
2. Agar $f, g \in C_{[a;b]}$bo'lib, $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ munosabatlar o'rinli bo'lsa $f(c) = g(c)$ tenglik o'rinli bo'ladigan $c \in (a, b)$ mavjud ekanligini isbotlang.
3. Kesmada differensiallanuvchi bo'lgan har qanday funksiya shu kesmaning biror ichki nuqtasidan qavariq (yoki botiq) bo'lishini isbotlang.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. Ismatov N.A. "Uzluksiz funksiyalar va ularning hosilalari o'rtasidagi ayrim bog'liqliklar", Respublika ilmiy-amaliy konferensiya. Бухоро ДУ 2020

2. Sh.O.Alimov, R.R.Ashurov, “Matematik tahlil”, T.”Kamalak” 2012.
3. Sadovnichiy V.A, GrigoryanA.A, Konyagin S.V , “Zadachi studencheskix matematicheskix olimpiada”, Moskva 1987
4. Mamatov, J., & Parmonov, A. (2020). Tasvirli masala matematikani o'qitish samaradorligini oshirish vositasi sifatida. Архив Научных Публикаций JSPI, 109-109.